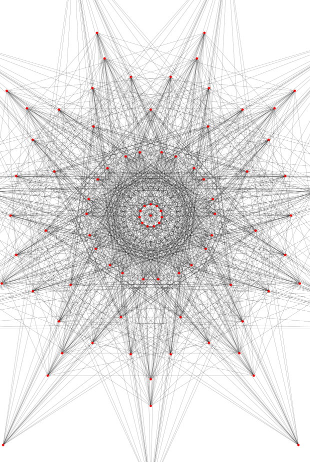
Майже неможлива

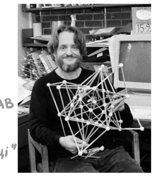
Решітка Ліча

Річард Боршердс
побудував
" монсруозну алгебру Лі"
в 1992

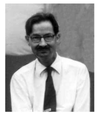
Марсель Голей
побудував бінарний код Голея
в 1949



Джон Конвей
Відкрив 3
спорадичні прості
скінчені групи
та запропонував
"Гіпотезу
монструозної нісенітниці"



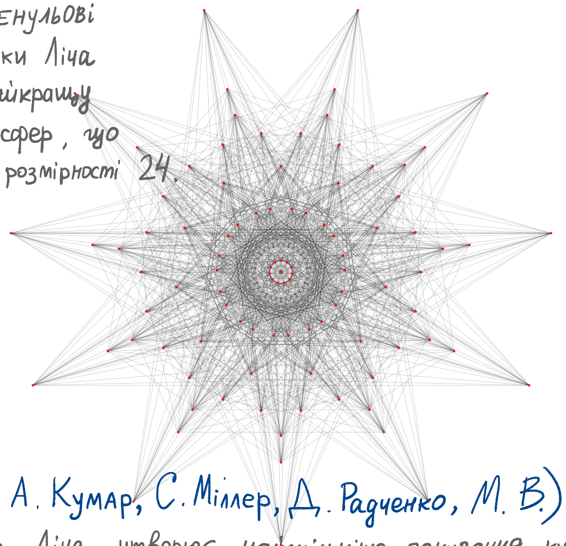
1968, 1969, 1979



Джон Ліч
Відкрив
решітку Ліча
в 1965

1979 (В. Левенштейн / А. Одлижко, Н. Слоан)

Найкоротші ненульові вектори решітки Ліча утворюють найкращу конфігурацію сфер, що цілуються в розмірності 24.



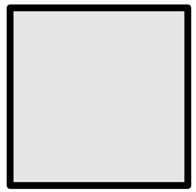
2016 (Г. Кон, А. Кумар, С. Міллер, Д. Радченко, М. В.)

Решітка Ліча утворює найщільніше пакування куль в розмірності 24.

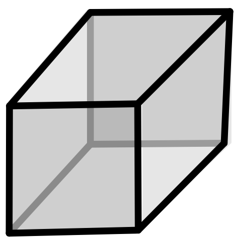
Dimension

D1

D2



D3



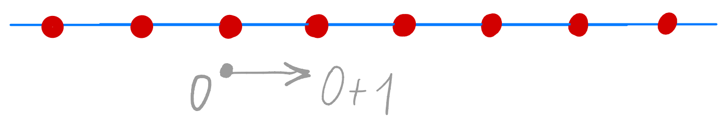
Евклідів простір розмірності d складається з точок

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d).$$

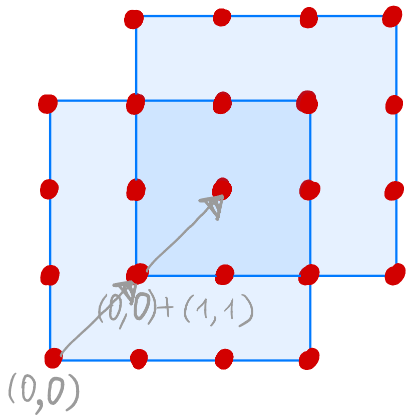
Кожна координата x_i є дійсним числом.

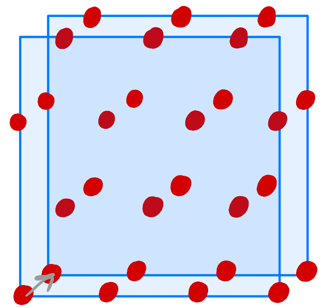
Решітки

D1



D2





періодична конфігурація точок.

Не решітка

Приклад: $\mathbb{Z}^2 = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$

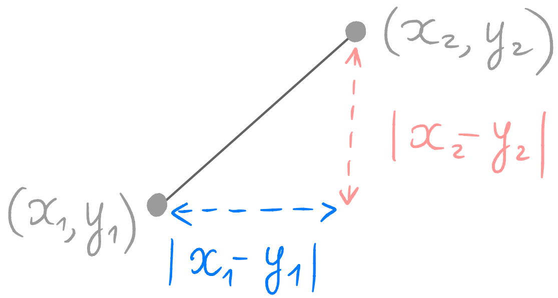
Множина точок площини з цілими координатами.

Відстань між двома точками в $\mathbb{R}^d$

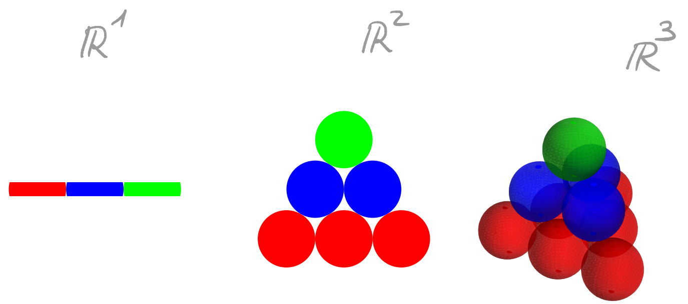
Нехай $x = (x_1, \dots, x_d)$ та $y = (y_1, \dots, y_d)$ це дві точки в $\mathbb{R}^d$.

Тоді

$$dist(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}.$$



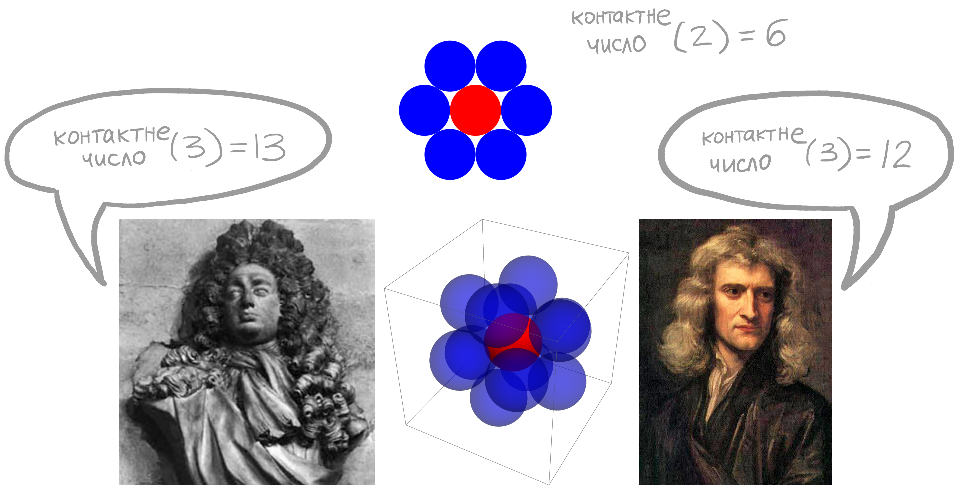
Кулі і сфери в $\mathbb{R}^d$



Куля з центром x та радіусом r це множина точок y таких, що відстань між x і y менша за r.

Сфера з центром x та радіусом r це множина точок y таких, що відстань між x і y дорівнює r.

Контактне число



Грегорі Ньютон

Що ми знаємо про контактні числа?

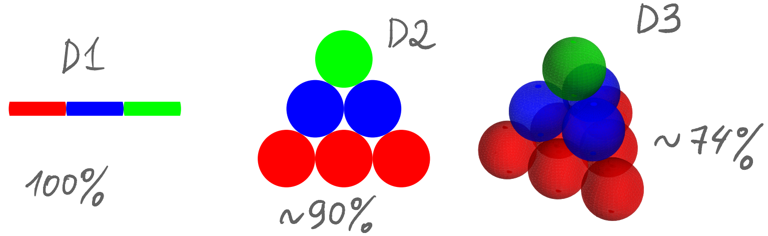
Розмірність	Контактне число	
1	2	
2	6	Правильний шестикутник
3	12	Вершини ікосаедра + деформації
4	24	Найкоротші вектори решітки D_4 2003 О. Мусін
5	40 – 44	
6	72 – 78	
7	126 – 134	
8	240	Найкоротші вектори решітки E_8
⋮	⋮	
24	196560	Найкоротші вектори решітки Ліча

В. Левенштейн та незалежно А. Одлижко та Н. Слоан

1979

Пакування куль в $\mathbb{R}^d$

Куля з центром x та радіусом r це множина точок y таких, що відстань між x і y менша за r.

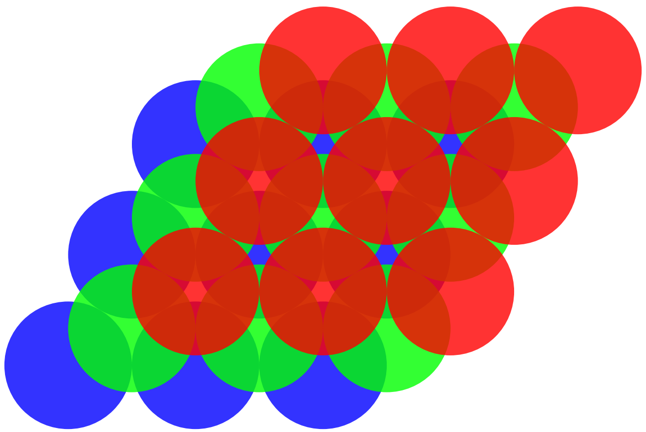


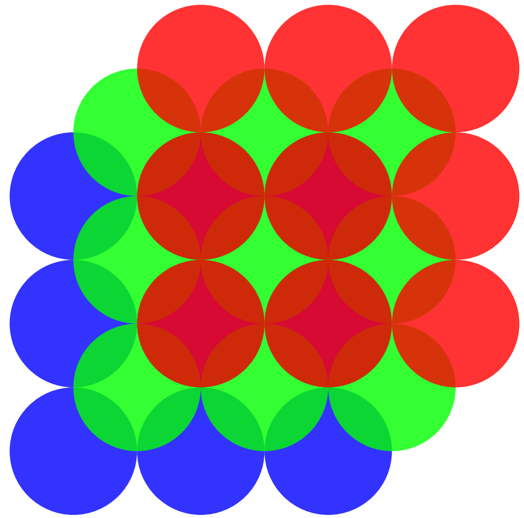
Яка найщільніша можлива конфігурація куль в $\mathbb{R}^d$?

Гіпотеза Кеплера

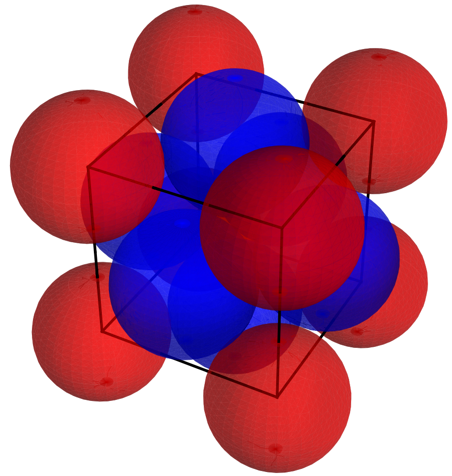
Иохан Кеплер

Томас Харріот

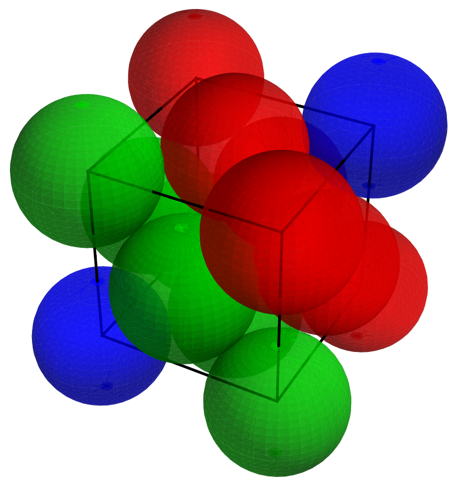


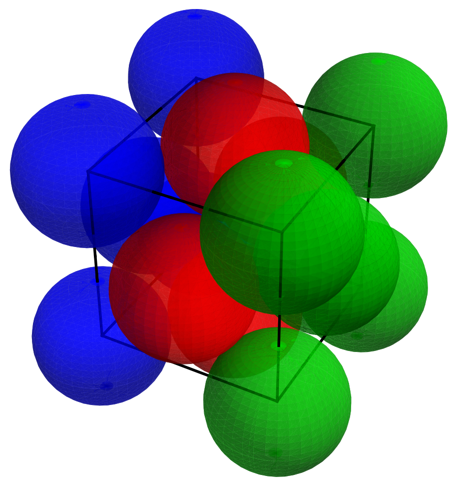


Гранецентрована кубічна решітка

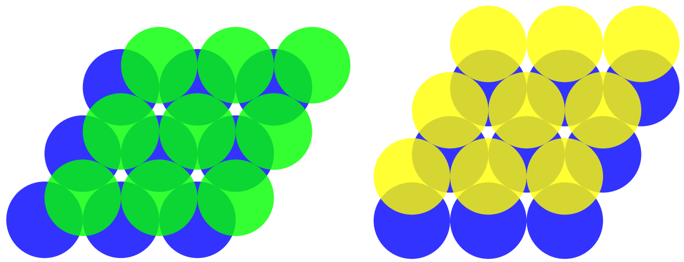


Вершини кубів та центри граней кубів





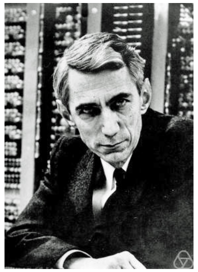
Чому гіпотеза Кеплера така складна?



Існує незліченно багато пакувань оптимальної щільності.

Томас Хейлс розв'язав гіпотезу Кеплера
в 1998.

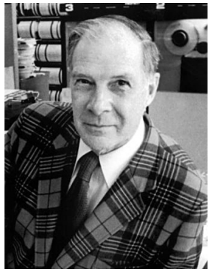
Пакування куль і коди, що виправляють помилки.



Клод Шеннон

„Математична теорія комунікацій"

1948



Річард Геммінг

Коди, що виправляють помилки

1947

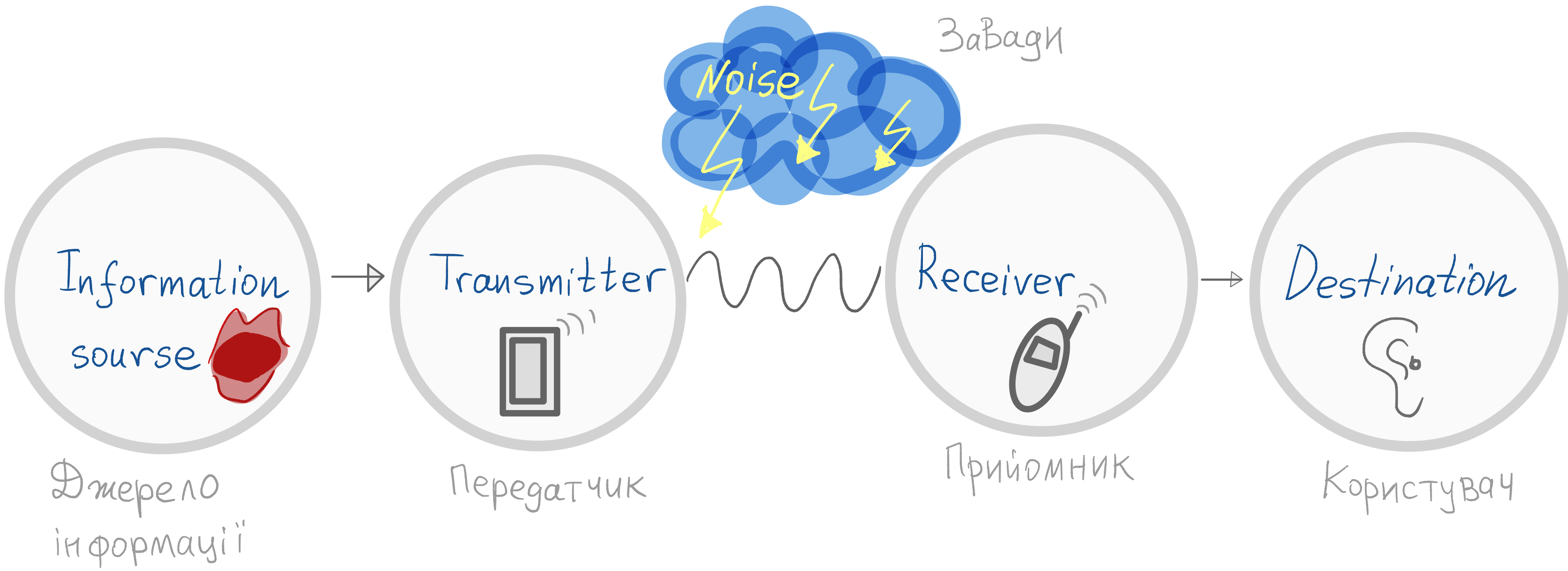
Марсель Голей

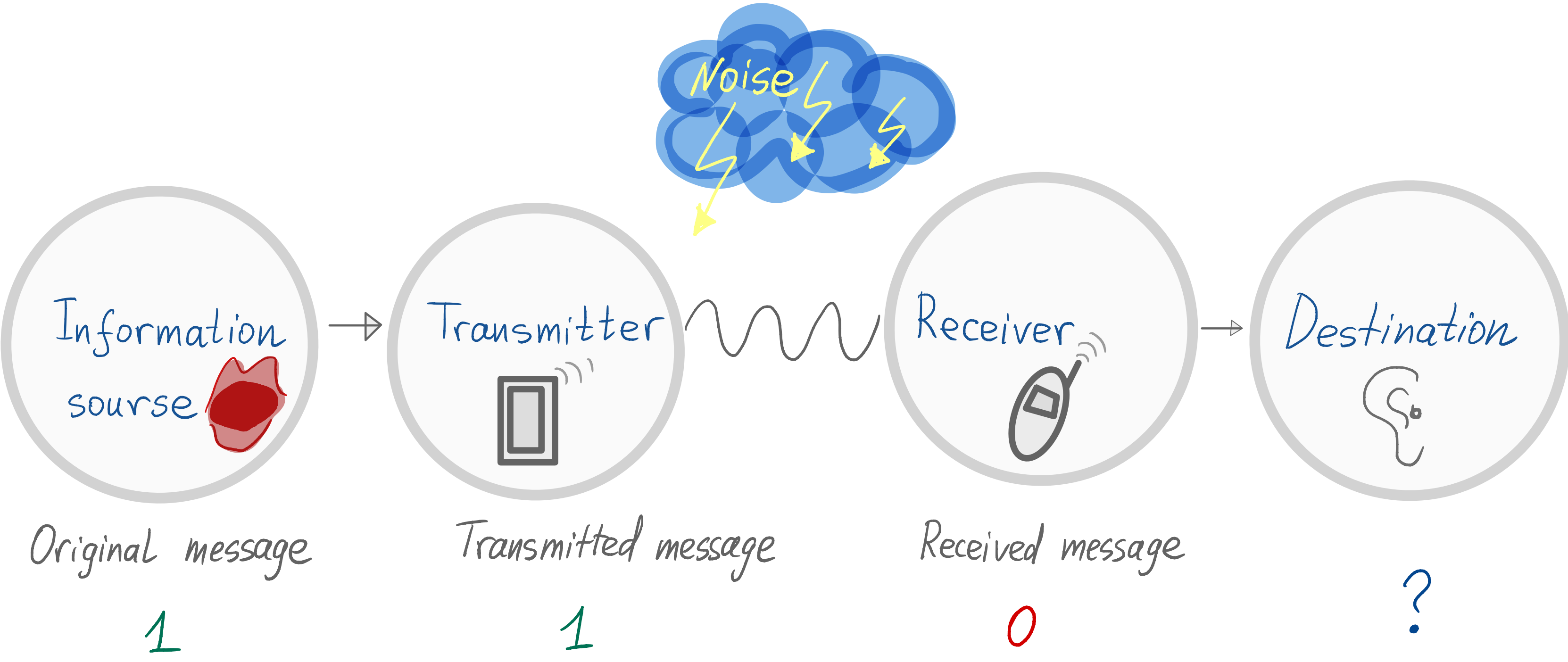
Бінарний код Голея

1949

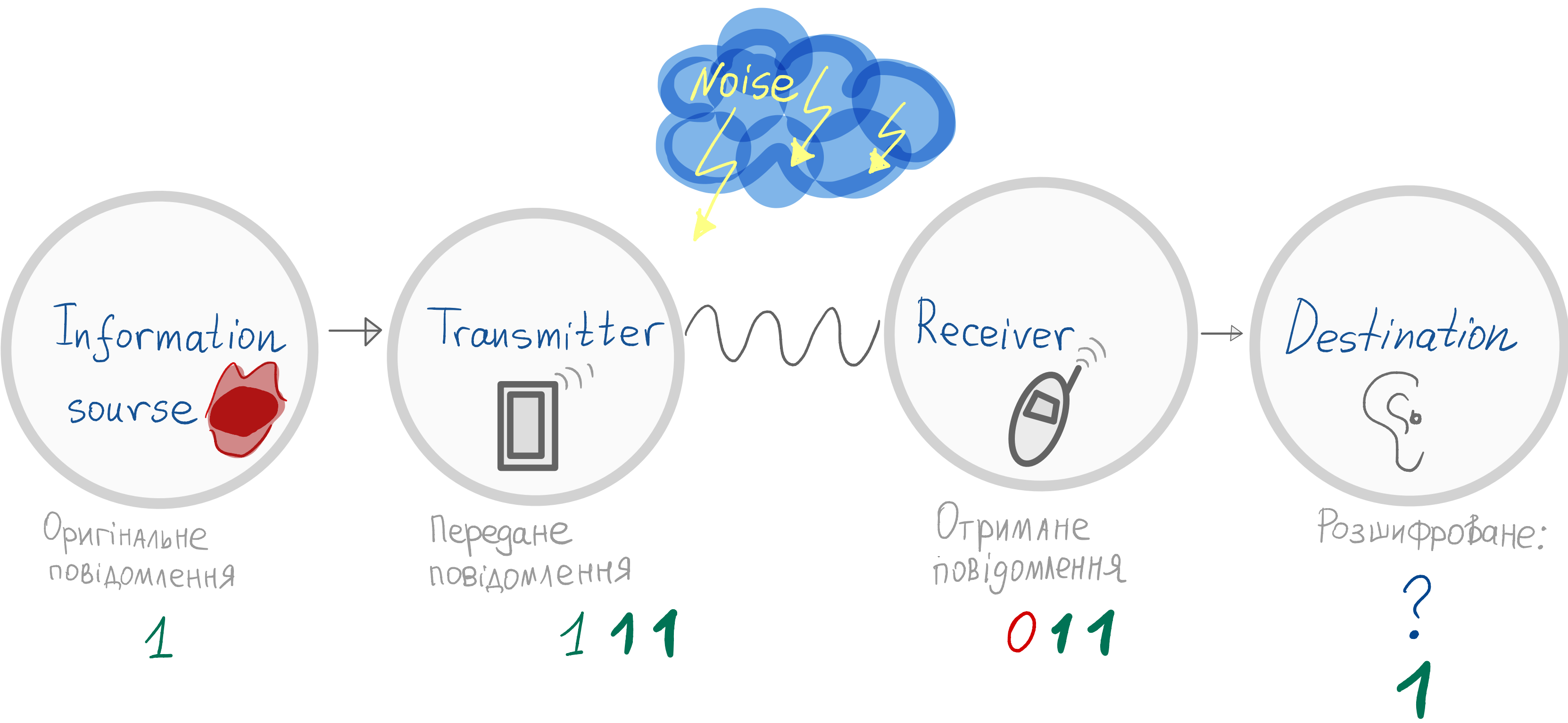
Спрощена схема системи комунікацій

(за Клодом Шенноном)





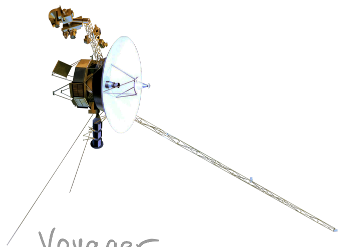
Noise
Information sourse
Transmitter
Receiver
Destination
Original message
Transmitted message
Received message
1
1
0
?



Повторюємо кожен біт 3 рази:

Ми можемо розпізнати 2 помилки і виправити 1 помилку.

Бінарний код Голея



Voyager

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1

2^{12} кодових слів довжини 24

Два різних кодових слова мають принаймні 8 різних координат.

Оригінальне повідомлення довжини 12

Передане повідомлення довжини 24

Розпізнає 7 помилок

Виправляє 3 помилки

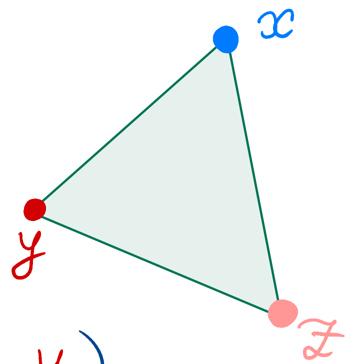
Геометрична інтерпретація кодів, що виправляють помилки.

Простір Геммінга : всі слова фіксованої довжини

$$x = (x_1, \dots, x_d) \qquad x_i \in \{0, 1\}$$

Відстань Геммінга : кількість відмінних символів на відповідних позиціях

Приклад : $\mathrm{dist}\,((0,1,0),\ (0,0,0)) = 1$



Нерівність трикутника :

$$\mathrm{dist}\,(x, y) \leq \mathrm{dist}\,(x, z) + \mathrm{dist}\,(z, y)$$

Означення: Куля радіуса r та центром x це множина точок простору на відстані менше ніж r від x.

$$B(x,r) := \{ y \mid dist(x,y) < r \}.$$

Код, що виправляє r помилок це пакування куль радіуса r в просторі Геммінга.

Від коду Голея до решітки Ліча.

Решітка Ліча складається з векторів вигляду:

$$\begin{array}{c} 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad \dots\quad 1 \\ 2^{-3/2}(a_1, a_2, \dots, a_{24}) \end{array}$$

де a_i це цілі числа такі, що

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{24} \equiv 4a_1 \equiv 4a_2 \equiv \dots \equiv 4a_{24} \pmod 8$$

та

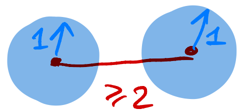
для кожної фіксованої остачі по модулю 4

24-бітне слово, в якому 1-ці стоять на тих позиціях і

де a_i має саме таку остачу по модулю 4,

є словом бінарного коду Голея.

$$\mathcal{P}_{\Lambda_{24}} := \bigcup_{\ell \in \Lambda_{24}} B(\ell, 1)$$



$\ell_1, \ell_2 \in \Lambda_{24}$

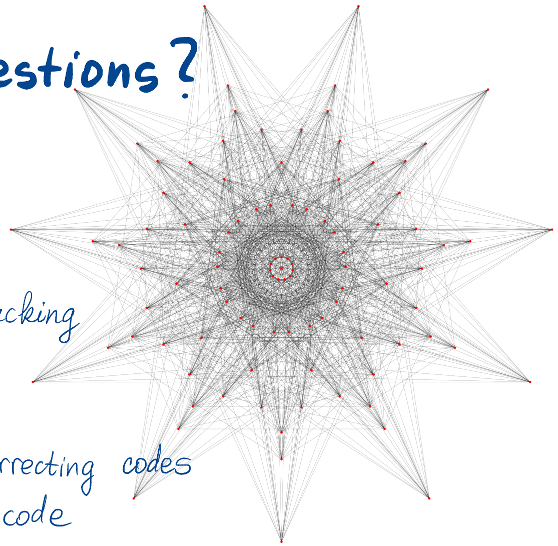
$|\ell_1 - \ell_2| = \sqrt{2n}$

$n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

Теорема (2016) Жодне пакування куль в 24-х вимірному Евклідовому просторі не є щільнішим за пакування, що відповідає решітці Ліча.

Thank you!

Questions?



1) Sphere packing
2) Dimensions
3) Lattices
4) Error correcting codes
5) Golay code
6) Leech lattice
7) Mathematical proofs