Noeuds, entrelacs et encadrements

Laureline Polli et Matthew Meyer

23 juin 2019

Buts de cet exposé

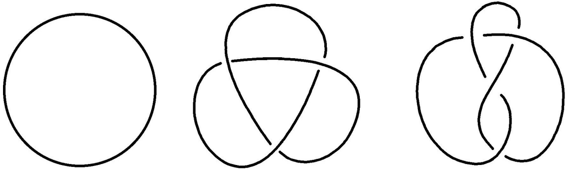
Les buts de cet exposé sont :

- Présenter ce que sont les noeuds et les entrelacs ;
- Discuter de différentes manières de distinguer ceux-ci ;
- Introduire une structure supplémentaire : *l'encadrement* d'un noeud.

Qu'est-ce qu'un noeud ?

Définition

Un noeud est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui est homéomorphe à S^1 à isotopie près.



Le noeud trivial, le noeud de trèfle et le noeud 8

Les entrelacs

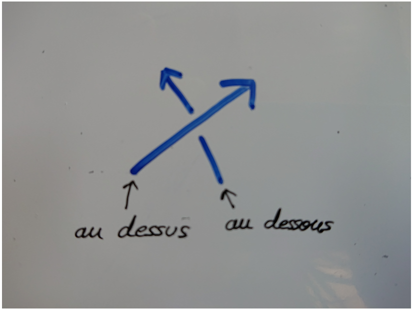
Définition

Un entrelacs est une collection de noeuds disjoints.

Le drapeau olympique, l'entrelacs de Hopf et l'entrelacs de Whitehead sont des entrelacs

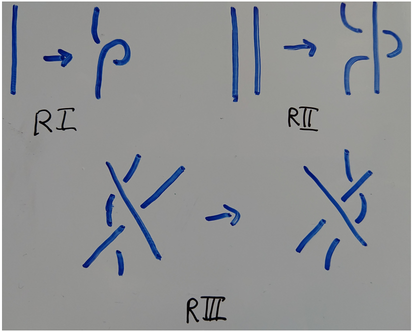
Les diagrammes d'entrelacs

Qu'est ce qu'un *bon* diagramme ?

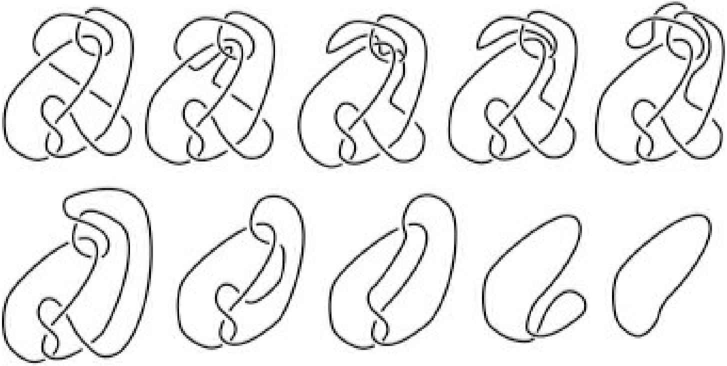


Les mouvements de Reidemeister

Théorème de Reidemeister : deux diagrammes de nœuds représentent le même nœud, si et seulement si il existe une suite de mouvements de Reidemeister permettant de passer de l'un à l'autre.



Exemple



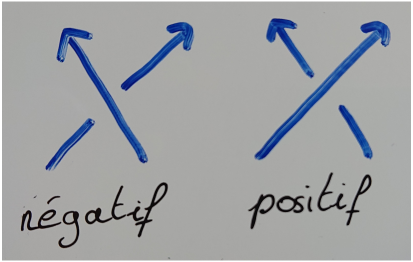
Les invariants

Définition

On appelle I un invariant de noeud si pour tous deux noeuds équivalents K et K', alors $I(K) = I(K')$.

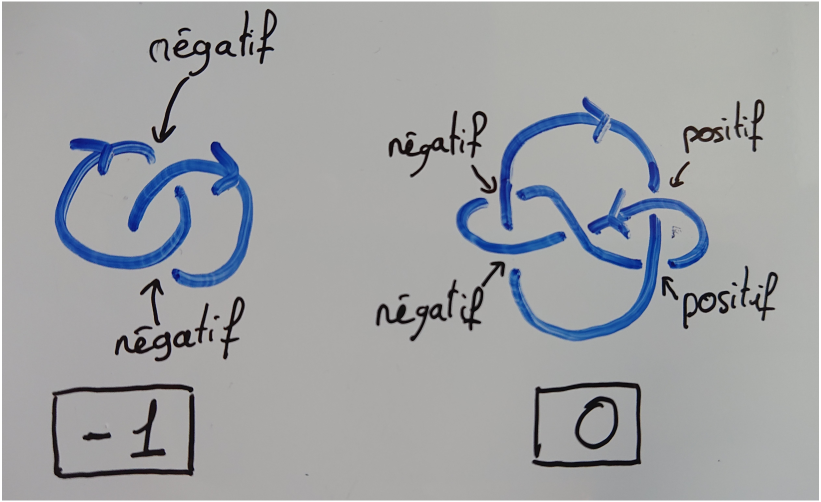
Le nombre d'enlacement

Le nombre d'enlacement est un invariant valable pour les entrelacs à plus d'une composante.
Il y a 3 règles pour calculer le nombre d'enlacement d'un entrelacs.



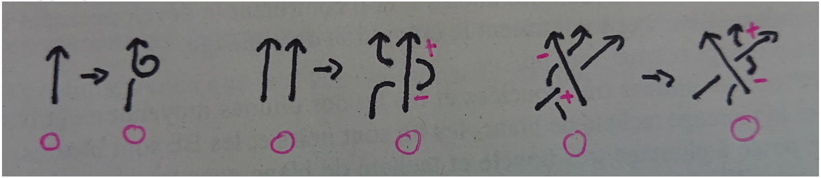
Exemple de nombre d'enlacement

Entrelacs de Hopf et entrelacs de Whitehead

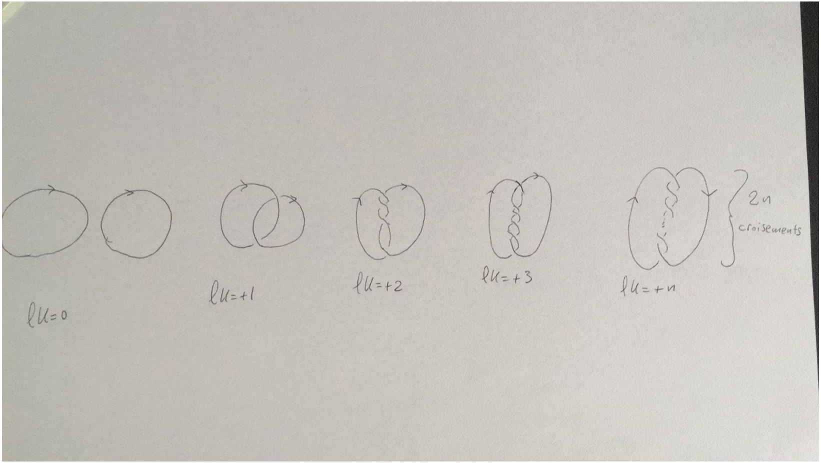


Lk est invariant

Preuve



Il existe une infinité d'entrelacs

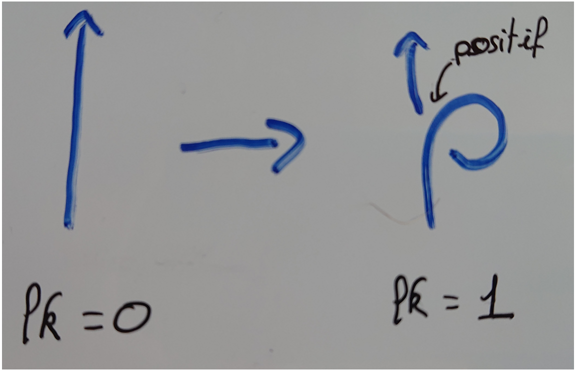


Le nombre d'enlacement pour les noeuds

On définit $\omega(K)$ le "self-linking number" l'équivalent du lk pour les noeuds.

Le nombre d'enlacement pour les noeuds

On remarque que $\omega(K)$ n'est pas invariant par RI :

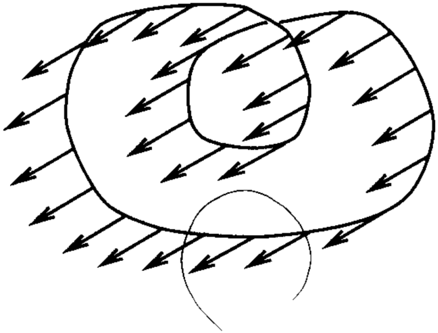


L’encadrement d’un noeud

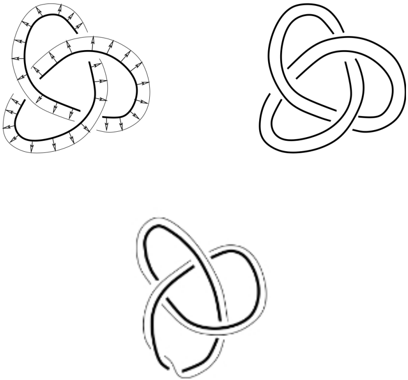
Définition

Un encadrement de noeud est un champ vectoriel tel que, à tous point du noeud, on associe un vecteur non nul qui n’est pas tangent à ce noeud.

Exemple d'encadrements : le blackboard framing



La projection ruban



Deux encadrements : un qui est ruban et un qui est non-ruban

La projection ruban (suite)

Proposition

Pour tout noeud encadré, il existe toujours une projection ruban lui correspondant.

Encadrements équivalents

Définition

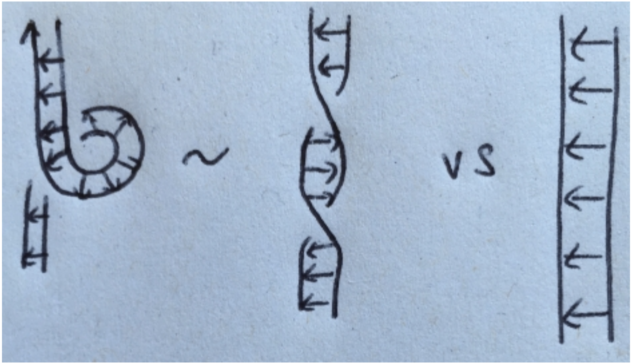
Deux encadrements sont équivalents s'ils sont les mêmes à isotopie près et que leurs champs vectoriels sont reliés par cette isotopie.

Question

Peut-on appliquer le théorème de Reidemeister aux encadrements ?

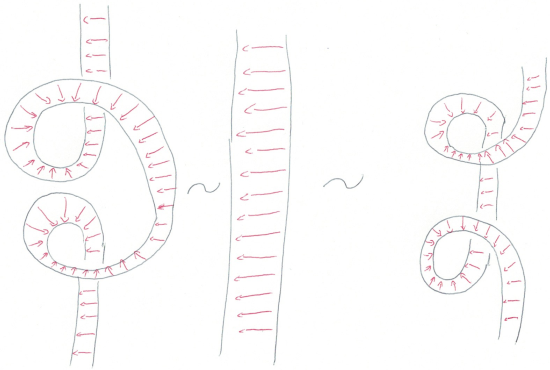
Le problème avec RI

On observe que l'on ne peut pas effectuer le mouvement de Reidemeister I pour le diagramme d'un noeud encadré.



Mouvement RI'

On introduit alors un nouveau mouvement, que l'on nommera RI'.



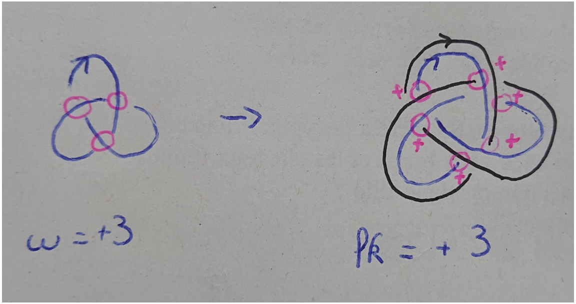
Théorème de Reidemeister pour les encadrements

Reidemeister pour les encadrements

Considérons deux rubans. Alors ils sont équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une chaine de mouvements RI', RII et RIII.

Distinction des encadrements grâce au lk

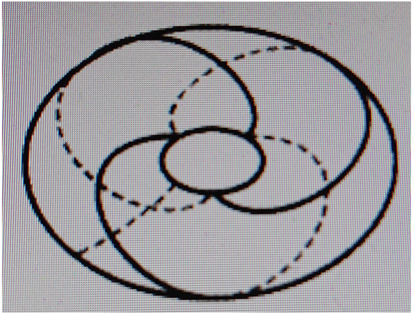
Lorsque l'on a une projection ruban, on peut calculer son *linking number*.



Noeuds sur un tore

Proposition

On peut représenter les encadrements de noeud trivial sur un tore.



Conclusion

- Invariants pour différencier les entrelacs ;
- Introduction du lk : le nombre d'enlacement ;
- Adaptation du lk pour les noeuds et l'encadrement d'un noeud ;
- Encadrement du noeud trivial en dessinant des noeuds sur un tore.

Remerciements

Théorème

En vue de la superbe expérience que nous avons passée à PRIMES Switzerland, nous remercions notre tuteur Donald, l'UNIGE, le MIT, et les gentils spectateurs qui sont venus nous voir aujourd'hui :)

Source

Toutes les images que nous n'avons pas faites nous-mêmes proviennent de l'excellent livre "The Knot Book : An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots" de Colin C. Adams.